OPCIÓN A

Ejercicio 1 de la opción A del modelo 1 de 1998.

Considera la función f : R $\rightarrow$ R definida por f(x) = |x+3|

(a) Estudia la derivabilidad de f.

(b) Dibuja las gráficas de f y f '.

Solución

$$f(x)=|x+3|=\begin{cases} x+3 & \text{si} \quad x \geq -3 \\ -x-3 & \text{si} \quad x < -3 \end{cases}$$

(a)

$$f'(x)=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > -3 \\ -1 & \text{si} \quad x < -3 \end{cases}$$

Para ver si es derivable en x = 3, tenemos que ver que $f'(-3^+) = f'(-3^-)$

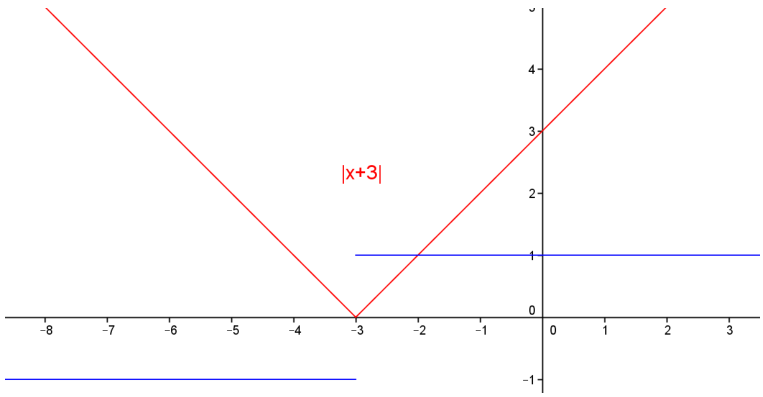
$f'(-3^+) = \lim_{x \to -3+} f'(x) = \lim_{x \to -3} (1) = 1$

$f'(-3^-) = \lim_{x \to -3-} f'(x) = \lim_{x \to -3} (-1) = -1$

Como $f'(-3^+) \neq f'(-3^-)$, no existe f ' (-3)

(b)

La gráfica de f está en rojo y la de f ' en azul. Ambas son trozos de rectas y fáciles de pintar



Ejercicio 2 de la opción A del modelo 1 de 1998.

(a) Representa las curvas de ecuaciones $y = x^2 - 3x + 3$ e $y = x$, calculando donde se cortan.

(b) Halla el área del recinto limitado por dichas curvas.

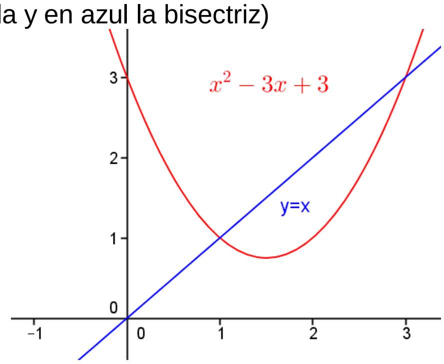
Solución

(a)

$y = x^2 - 3x + 3$ es una parábola, su vértice es V=(1'5, 0'75) (su abcisa es la solución de f ' (x) = 0), no corta al eje de abcisas porque f(x) = 0 no tiene solución real, y corta al eje OY en (0,3)

y = x es la bisectriz del primer y tercer cuadrante.

Sus gráficas son (en rojo la parábola y en azul la bisectriz)



(b)

Para determinar el área tenemos que localizar los puntos donde coinciden la recta y la parábola, es decir las soluciones de la ecuación ecuaciones $x^2 - 3x + 3 = x$, es decir las soluciones de $x^2 - 4x + 3 = 0$, que son x = 1 y x = 3.

$$\text{Area}=\int_1^3 \left[x-(x^2-3x+3)\right]dx=\int_1^3\left[-x^2+4x+3\right]dx=\left[\frac{-4x^3}{3}+\frac{4x^2}{2}-3x\right]_1^3 = [\ (-27/3 + 36/2 - 9)\ -\ (-1/3 + 4/2 - 3)\ ] =$$

4/3 u.a.

Ejercicio 3 de la opción A del modelo 1 de 1998.

Dados los puntos A = (1,0,1), B=(0,0,-1) y C=(3, α, β), se pide:

(a) Determina, si es posible, α y β de forma que los tres puntos estén alineados.

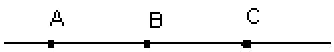
(b) Encuentra, si existe, un punto Q situado en el eje OY y tal que el triángulo ABQ sea un triángulo rectángulo con ángulo recto en B.

(c) Si D es el punto D=(2,0,-2), prueba que el triángulo ABD es rectángulo y calcula su área.

Solución

A = (1,0,1), B=(0,0,-1) y C=(3, α, β),

(a)



Si A, B, C están alineados entonces $\vec{AB}=\lambda\,\vec{CD}$, con lo cual las componentes de los vectores son proporcionales.

$\vec{AB}=(-1,0,2)$, $\vec{CD}=(2,\alpha,\beta\text{-}1)$

$$\frac{-1}{2}=\frac{0}{\alpha}=\frac{-2}{\beta-1}$$

de donde obtenemos α = 0 y β = 5

(b)

Si Q está situado en el eje OY, es de la forma Q(0,y,0). Si el triángulo ABQ sea un triángulo rectángulo con ángulo recto en B, los vectores **BA** y **BQ** son perpendiculares con lo cual su producto escalar es cero.

BA = (1,0,2) , **BQ** = (0,y,0) por tanto **BA•BQ** = 0 +0 +2 ≠ 0, por tanto no existe ningún punto Q que cumpla esas condiciones.

(c)

El triángulo ABD es rectángulo, con D=(2,0,-2) si y solo si los vectores **BA** y **BD** son perpendiculares, es decir **BA•BD** = 0, pero **BA** = (1,0,2), **BD** = (2,0,-1) y **BA•BD** = 2 + 0 – 2 = 0.

Como es un triángulo rectángulo el área es ½ de careto por cateto, por tanto

$$\text{Area}=1/2\left|\vec{BA}\right|\left|\vec{BD}\right|=1/2\sqrt{5}\sqrt{5}=5/2 \quad \text{u.a.}$$

Ejercicio 4 de la opción A del modelo 1 de 1998.

Considera el sistema de ecuaciones lineales $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -k & 3 & -1 \\ 1 & 2 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$

(a) ¿Para qué valores de k no tiene inversa la matriz de los coeficientes?

(b) Discute el sistema según los valores de k.

Solución

(a)

La matriz A no tiene inversa si y solo si su determinante es cero

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -k & 3 & -1 \\ 1 & 2 & k \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -k & 3+k & -1+k \\ 1 & 1 & k-1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3+k & k-1 \\ 1 & k-1 \end{vmatrix}=(k-1)(k+2)$$

Por tanto si k = 1 y k = -2 el determinante de A es cero.

(b)

Si k ≠ 1 y k ≠ -2 el sistema tiene solución única.

Si k = 1, la matriz de los coeficientes A y la matriz ampliada A^* son

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

Como $|A|=0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}\neq 0$, el rango de A es 2.

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} = -28+1 \neq 0$, tenemos rango ($A^*$) = 3, y por el Teorema de Roüché-Frobeniüs como rango(A)=2≠3=rango(A^*) **el sistema es incompatible.**

Si k = -2, la matriz de los coeficientes A y la matriz ampliada A^* son

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad y \quad A^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

Como $|A|=0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$, el rango de A es 2.

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} = 0$, tenemos rango ($A^*$) = 3, y por el Teorema de Roüché-Frobeniüs como rango(A) = 2 = rango(A^*) **el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones**.

Lo resolvemos (No lo piden)
Como el rango es 2 tenemos dos ecauciones (las dos primeras, con las que he formado el menor distinto de cero), y dos incógnitas principales.

Resolvemos la ecuación matricial $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -k & 3 & -1 \\ 1 & 2 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$

$$x + y + z = 2$$
$$2x + 3y - z = -3$$
$$x + 2y - 2z = -5$$

$x + y + z = 2 \quad \rightarrow \quad x + y + z = 2$
$2x + 3y - z = -3.\ F_2 + F_1\cdot(-2) \quad \rightarrow \quad y - 3z = -9.$
Tomando $z = \lambda \in$ R, tenemos $y = -9 + 3\lambda$, con lo cual $x + (-9 + 3\lambda) + (\lambda) = 2$, luego $x = 11 - 4\lambda$.
Solución del sistema para k = -2: (x,y,z) = (11 - 4λ, - 9 + 3λ, λ) con λ ∈ R.

OPCIÓN B

Ejercicio 1 de la opción B del modelo 1 de 1998.

(a) Sabiendo que F es una primitiva de una función f, halla una primitiva de f que se anule en el punto x = a
(b) De una función $g : \Re \rightarrow \Re$ se sabe que es dos veces derivable y también que g(0) = 5, g '(0) = 0 y g ''(x) = 8, para todo $x \in \Re$. Calcula una expresión algebraica de esta función g.

Solución

(a)
Si F es una primitiva de f entonces F ' = f

$$F(x)+K=\int f(x)dx$$

Como se anula en x =a, F(a) + K = 0 de donde K = -F(a) y cualquier otra primitiva es de la forma G(x) = F(x) – F(a)
(b)
g es dos veces derivable, g(0) = 5, g ' (0) = 0 y g '' (x) = 8.
Por el teorema fundamental del calculo integral que dice: Si f(x) es continua en [a,b] entonces la función

$F(x)=\int_a^x f(t)dt$ es derivable y su derivada es

$$F'(x)=\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x)$$

Aplicándolo a nuestro caso tenemos

$$g'(x)=\int g''(x)dx=\int 8dx=8x+K$$

Como g '(0) = 0, tenemos 0 = 0 + K, luego g '(x) = 8x + 0 = 8x
Volviendo a aplicar el Teorema fundamental del calcula integral

$$g(x)=\int g'(x)dx=\int 8xdx=8\frac{x^2}{2}+K$$

Como g(0) = 5, tenemos 5 = 0 + K, de donde K = 5. Por tanto g(x) = $4x^2 + 5$.

Ejercicio 2 de la opción B del modelo 1 de 1998.

Calcula $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\cos(x-1)}{(\ln(x))^2}$, siendo ln(x) el logaritmo neperiano de x.

Solución

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\cos(x-1)}{(\ln(x))^2}=\dfrac{1-\cos(0)}{(\ln(1))}=\left(\dfrac{0}{0}\right)$, aplicándole la regla de L¨Hôpital

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\text{sen}(x-1)}{2.\ln(x).\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x.\text{sen}(x-1)}{2\ln(x)}=\dfrac{1.\text{sen}(0)}{2\ln(1)}=\left(\dfrac{0}{0}\right)$, volviendo a aplicar la regla

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1.\text{sen}(x-1)+x.\cos(x-1)}{2.\dfrac{1}{x}}=\dfrac{\text{sen}(0)+0.\cos(0)}{2.1}=\dfrac{0}{2}=0$

Ejercicio 3 de la opción B del modelo 1 de 1998.

De la matriz A dada por $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 3 & 5\\ 2 & 8 & \alpha\end{pmatrix}$, se sabe que no tiene inversa.

(a) ¿Cuanto vale α ? Justifica la respuesta.

(b) Resuelve el sistema $\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 3 & 5\\ 3 & 8 & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$

(c) ¿Existe alguna solución de dicho sistema con y = -1 ?

Solución

(a)

Si la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 3 & 5\\ 2 & 8 & \alpha\end{pmatrix}$ no tiene inversa, su determinante es cero

$|A|=\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 3 & 5\\ 3 & 8 & \alpha\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 7 & 3\\ 3 & 14 & \alpha-3\end{vmatrix}=7\alpha-63=0$

de donde α = 9, puesto que A no tien inversa.

(b)

Como |A| = 0, el rango de A es 2. Para que el sistema tenga solución el rango de la matriz de los coeficientes A^* tambien tiene que ser 2, es decir el determinante formado por las dos primeras columns de a y los términos independientes tiene que ser cero. Pero

$\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 3 & 2\\ 3 & 8 & 1\end{vmatrix}=0$

con la cual rango de A^* = 2, y el sistema tiene solución.

Como el rango es 2 solo se necesitan dos ecuacones, y por comodidad elegimos las dos primeras

x – 2y + z = 3

2x + 3y + 5z = 2

Tomando z = $\lambda\in\Re$, nos queda el sistema

x – 2y = 3 - λ

2x + 3y = 2 - 5λ

Resolviendo este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas obtenemos x = (13 - 13λ) / 7 e y = (-4 - 3λ) / 7, es decir la solucioón de este sistema indeterminadao es

(x,y,z) = ((13 - 13λ) / 7 , (-4 - 3λ) / 7 , λ)

(c)

Como me piden la solución para y = - 1, tenemos de la solución anterior

(x,y,z) = ((13 - 13λ) / 7 , (-4 - 3λ) / 7 , λ) igualando los valores de "y"

-1 = (-4 - 3λ) / 7, de donde λ = 1, y sustituyendo tenemos:

(x,y,z) = ((13 – 13.1) / 7 , (-4 – 3.1) / 7 , 1) = (0 , -1 , 1)

Ejercicio 4 de la opción B del modelo 1 de 1998.

Halla la ecuación de una circunferencia sabiendo que su centro está en la recta de ecuación $y = x+1$, que es tangente a la recta $y = x$, y que también es tangente a la recta $y = 0$.

Solución

La ecuación de una circunferencia de centro (a,b) y radio r es $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.
Como me dicen que el centro está en la recta $y = x+ 1$, tengo que $b = a + 1$.
Como me dicen que es tangente a la recta $y = 0$, que es el eje de abcisas, y sabiendo que el radio es perpendicular en el punto de tangencia, resulta que la ordenada en ese punto de tangencia que es b coincide con el radio, es decir $b = a + 1 = r$.
Como me dicen que es tangente a la recta $y = x$, y el centro está en la recta $y = x + 1$, que es paralela a la anterior, resulta por otro lado que el radio r es la distancia entre las rectas paralelas $s \equiv y = x$ e $t \equiv y = x+1$, luego

$$r=d(s,t)=\frac{|1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

recordando la fórmula de la distancia entre dos rectas paralelas $s \equiv mx+ny+p=0$ y $t \equiv m'x+n'y+p'=0$

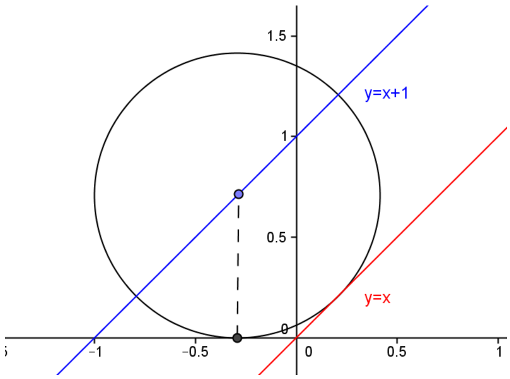
$$d(s,t)=\frac{|p-p'|}{\sqrt{m^2+n^2}}$$

Tenemos por tanto $r=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $a+1=r=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=b$

De donde $a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}-1=\dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

Por tanto la ecuación de la circunferencia pedida es $\left(x-\left(\dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)\right)^2+\left(y-\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)^2=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$

Una gráfica de ello sería



donde la recta donde está el centro está en azul, la recta y = x en rojo